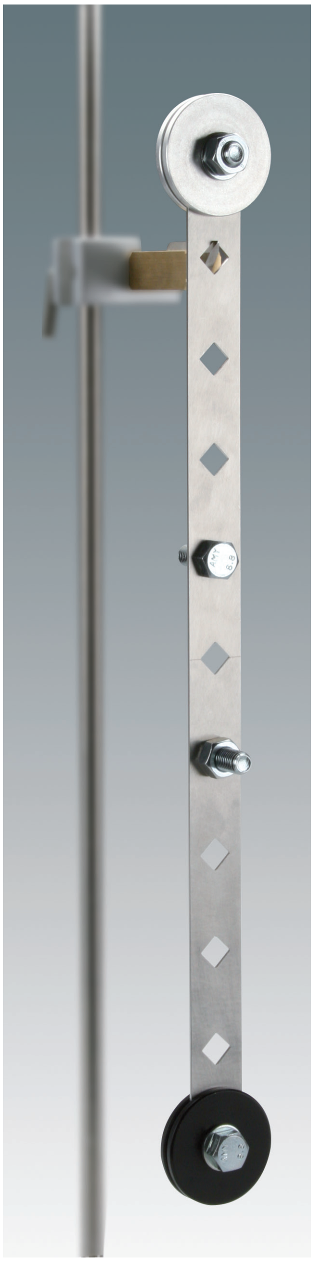
Vejledning til Fysisk pendul / Bessel-pendul

18.04.13 2181.00 AA

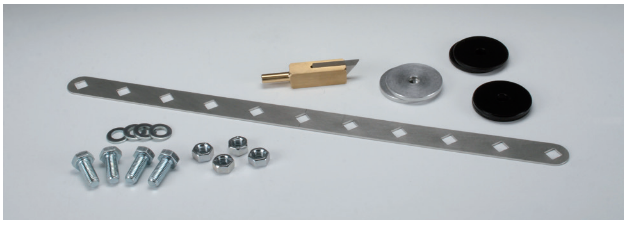


BESKRIVELSE

Apparatet består af en stålstang med en række huller, som dels anvendes som pendulets leje, dels bruges til fastgørelse af lodder. Den faste del af lejet udgøres af en solid knivsæg, som fastgøres til normalt stativmateriale eller endnu bedre en bordkant.

Apparatet leveres med 4 skiver af stål og 2 skiver af aluminium. Skiverne anvendes parvis – anbragt på hver side af stålstangen med en bolt. To skiver, en bolt og en møtrik kaldes herefter et *lod.*

Der medfølger to ekstra sæt bolte og møtrikker, som anvendes som ”trimmelodder” i forbindelse med Bessel-pendulet.
Til Bessel-pendulet anvendes desuden 4 spændeskiver sammen med de store lodder.



ANVENDELSER

1 – **Det fysiske pendul** anvendes i studiet af inertimomenter og stive legemers bevægelse.

Tyngdepunkt, ophængspunkt og inertimoment kan varieres på utallige måder. Til beregningsarbejdet får man god brug for Steiners sætning samt en række formler for inertimomenter af de forskellige bestanddele af pendulet. Disse sammenhænge findes i afsnittet *Inertimomenter.* De praktiske beregninger udføres mest fordelagtigt i et regneark.

2 – **Reversionspendulet** anvendes til bestemmelse af tyngdeaccelerationen. Navnet refererer til, at pendulet kan endevendes – der er et ophængspunkt i hver ende. Reversionspendulet opbygges, så ophængspunkterne har forskellig afstand til massemidtpunktet og justeres derefter, så det har samme svingningstid om de to ophængspunkter.

Reversionspendulet blev udviklet af Henry Kater. Princippet blev forfinet af F. W. Bessel, og hans version kan demonstreres med dette apparat (om end nøjagtigheden ikke er så høj som i de klassiske præcisionspenduler). **Bessel-pendulet** er et reversionspendul, som er volumenmæssigt (geometrisk) symmetrisk, selv om massefordelingen er asymmetrisk. Det viser sig, at to fejlkilder, som skyldes luftens tilstedeværelse, derved forsvinder. (Det drejer sig om hhv. opdriften og om, at en smule luft vil svinge sammen med pendulet, som derfor synes tungere.) For detaljer henvises til litteraturfortegnelsen.

A/S Søren Frederiksen, Ølgod
Viaduktvej 35 · DK-6870 Ølgod
Tel. +45 7524 4966
Fax +45 7524 6282
info@frederiksen.eu
www.frederiksen.eu

EN SMULE TEORI

Vi vil betragte et stift legeme som sammensat af et stort antal små bestanddele.

Legemets **inertimoment** omkring en given akse er da givet som en sum af bidrag fra de enkelte bestanddele, hver på formen

$$I_j = m_j \cdot {r_j}^2$$

hvor m_j er massen af bestanddel nr. *j* og r_j er afstanden mellem denne og omdrejningsaksen.

Det samlede inertimoment kan dermed skrives på formen

$$I = \sum_j I_j$$

I praksis bestemmes inertimomenter ved integration. Hvis legemets form er tilstrækkeligt simpel, kan dette gøres analytisk. Der er en række relevante eksempler på dette i et senere afsnit.

Kaldes et legemes inertimoment om en akse gennem dets tyngdepunkt for I_G, kan inertimomentet *I* om en vilkårlig anden akse, som er parallel med den første, bestemmes vha. **Steiners sætning:**

$$I = I_G + Ma^2$$

Her er *M* det betragtede legemes masse og *a* er afstanden mellem de to akser.

Denne sætning er uhyre nyttig ved beregning af inertimomenter, når man ser bort fra de allermest simple tilfælde.

Betegnelsen ”fysisk pendul” anvendes, når et stift legeme er ophængt i en akse, som ikke går gennem tyngdepunktet.

Svingningstiden for det fysiske pendul er givet ved

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mag}}$$

hvor *I* er inertimomentet om omdrejningsaksen, *M* er den samlede masse, *a* er afstanden mellem omdrejningsaksen og massemidtpunktet, *g* er tyngdeaccelerationen.

INERTIMOMENTER

Det følger af definitionen på inertimoment, at et stift legemes samlede inertimoment om en akse kan bestemmes som en sum af inertimomenter for legemets bestanddele (om samme akse).

I det konkrete tilfælde vil vi dele pendulstangen op i et rektangulært stykke samt to halvcirkelformede ender. (Herfra skal fratrækkes materialet fra de 11 kvadratiske huller, hvis man vil være helt præcis.)

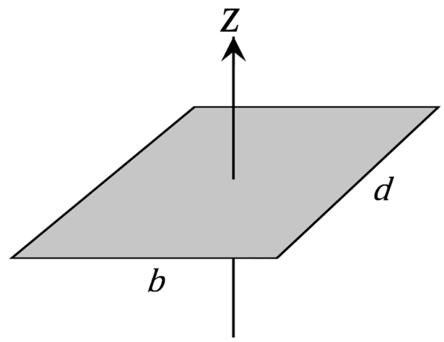
Massen af stangen fordeles på de tre dele proportionalt med deres areal.

De store skiver har form som en cylinder med et cylinderformet hul i midten. Lodderne fastholdes med en bolt, som vi kan betragte som punktformet. (Der skal stadig tages hensyn til boltens masse, det er blot dens inertimoment om eget centrum, vi sætter til 0.)

Herunder følger nogle formler for inertimomenter.

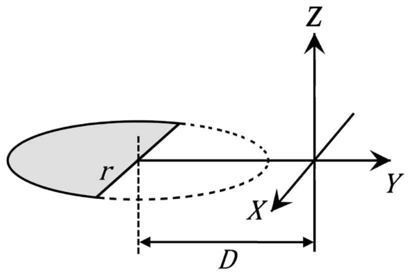
Rektangel med dimensioner *b x d* og masse *m*:

$$I_Z = \frac{m}{12} \cdot (b^2 + d^2)$$



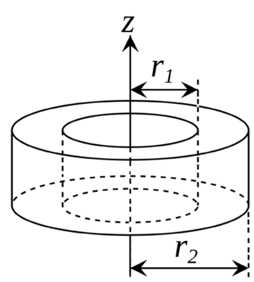
Halvcirkel med radius *r* og masse *m*, forskudt stykket *D*:

$$I_Z = m \cdot \left(D^2 + \frac{r^2}{2} + \frac{8Dr}{3\pi}\right)$$



Cylinder med ydre radius r_2, indre radius r_1 og masse *m*:

$$I_Z = \frac{m}{2} \cdot (r_1^2 + r_2^2)$$



Arbejdet med at holde rede på alle de enkelte dele af pendulet kan med fordel ske i et regneark.

MÅLING AF SVINGNINGSTID

Med stopur

Man måler tiden for et antal *hele* svingninger og dividerer med antallet. Præcisionen øges, hvis man starter og stopper uret, når pendulet passerer sit laveste punkt, hvor dets hastighed er størst. Sigt efter noget lodret bag pendulet, og flyt ikke hovedet mellem start og stop.

I praksis kan man næppe opnå lavere usikkerhed end 0,2 s.

Ønskes en nøjagtighed på f.eks. 0,5 %, skal den samlede måletid således være mindst 40 s.

Med Bessel-pendulet bør man ikke stile efter ringere nøjagtighed end 0,1%, svarende til 200 sekunders måletid.

Med fotocelle og tæller

Hæng pendulet lodret og helt i ro. Anbring fotocellen, så lysstrålen lige akkurat "rører" en lodret kant nederst på pendulet (kanten af stangen eller evt. kanten af et lod). Fotocelle type 1975.50 har en grøn lysdiode, som slukker, når lysstrålen afbrydes.

Når pendulet svinger (små udsving!), skal lysstrålen være afbrudt i hele den ene halvperiode og passere i hele den anden. Derved bliver en svingningstid netop tiden fra starten af en afbrydelse til den næste.

Med **tæller 2002.50** er proceduren som følger.

1) Fotocellen sættes i DIN-bøsning A

2) Træk pendulet en smule væk fra lysstrålen under de følgende punkter

3) Tryk *Select,* indtil lampen ud for Period lyser

4) Vent, indtil der er lys i lampen *Continuous,* tryk derefter på *Memory/Continuous*

5) Tryk til sidst på *Start/Stop*

6) Herefter kan pendulet slippes

Resultaterne vises som gennemsnit af to svingningstider.

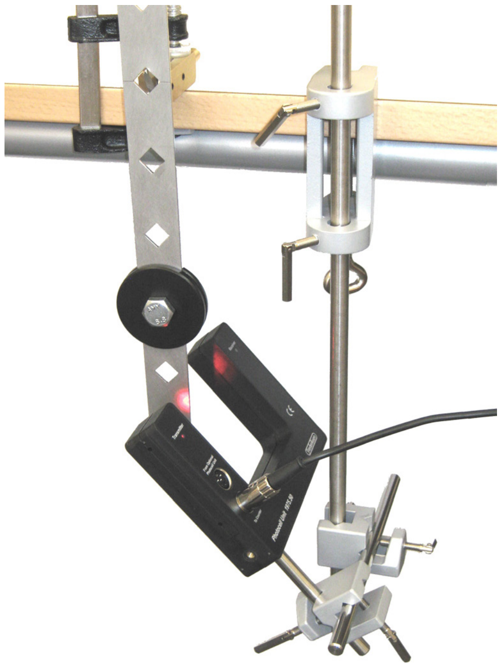
Med dataopsamlingsudstyr

Placér en bevægelsessensor ca. 20 cm fra pendulet ud for et lod. (Det kræver held at måle på stangen alene, men det kan lade sig gøre.) Indstil dataopsamlingsprogrammet til at registrere *position* med en målefrekvens på f.eks. 100 Hz. Kontrollér, at der opsamles en nogenlunde sinusformet kurve – der må ikke være sære takker, som indikerer, at sensoren rammer ved siden af målet.

Mål i "passende lang tid". Med Bessel-pendulet måles ca. et minut. Er præcisionskravene ikke er så store, kan tiden sættes ned.

Tilpas en *dæmpet svingning* til målepunkterne. Sørg for at indstille programmet, så der vises tilstrækkeligt mange cifre på parametrene!

Nogle programmer afleverer direkte svingningstiden T, andre bruger $\omega = 2\pi/T$.



FYSISK PENDUL

Til arbejdet med det generelle fysiske pendul anvendes hverken spændeskiverne eller de ekstra sæt bolte. Der er variationsmuligheder nok endda!

Eksperiment 1, 2 og 3 herunder kan udføres uafhængigt af hinanden.

Metalskiverne fastspændes med boltene – det er tilstrækkeligt at stramme dem godt med fingrene.

Knivlejet kan til simple demonstrationsforsøg spændes op i et stativ med en A-fod eller en bordklemme. Mere præcise resultater opnås ved at spænde ophænget fast til en solid bordkant med en skruetvinge. Helst lige over et bordben. Brug gerne et bord, der er fastgjort til en væg.

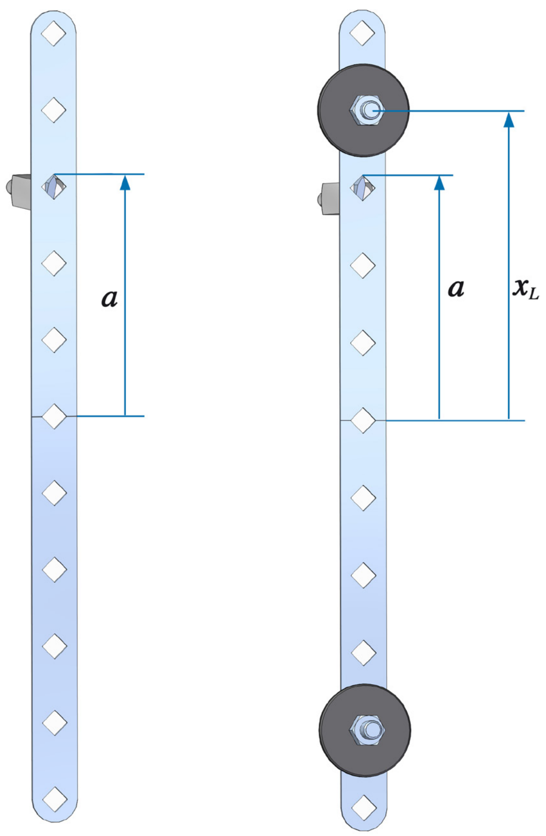
NB: Der er forskel på positionen, når et hul anvendes som ophæng (øvre kant) eller som placering for et lod (centrum). Vær omhyggelig med at bruge de korrekte værdier.

Amplituden for svingningerne skal være lille. Omkring en centimeter er fint.

1 – Stangens inertimoment

Mål svingningstiden som et gennemsnit over mindst 20 svingninger for hvert af de 6 mulige ophængspunkter (det midterste inklusive).

Udmål afstanden fra stangens midtpunkt til hver af de fem ophængspunkter præcist. Midtpunktet er markeret med en tynd linje – det kan være en ide midlertidigt at forlænge linjen hen over det midterste hul ved hjælp af kanten af en strimmel tape. (Disse afstande skal også bruges i de følgende forsøg.)



Beregninger – stangens inertimoment

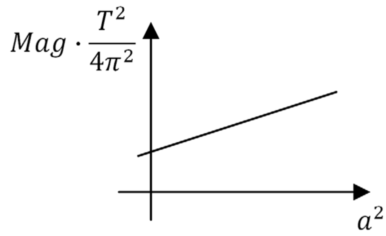
Formlen for svingningstiden kan omskrives til flg.

$$Mag \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} = I$$

Da massemidtpunktet ligger i stangens midtpunkt, er alle de indgående størrelser på venstre side kendte. Den samlede masse M er lig med stangens masse ms . For stangen uden lodder kan højre side omskrives ved hjælp af Steiners sætning:

$$I = I_S + m_S \cdot a^2$$

Det vil sige, at hvis størrelsen $Mag \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$ afbildes som funktion af a^2, skal resultaterne ligge på en ret linje med stangens masse m_S som hældningskoefficient og stangens inertimoment om centeret I_S som skæring med y-aksen.



Til sammenligning kan man beregne stangens inertimoment om midtpunktet ved at opdele den i to halvcirkulære ender samt et rektangulært stykke i midten – se også afsnittet "Inertimomenter". Fejlen ved at se bort fra de kvadratiske huller er forholdsvis lille.

For at bestemme massen af de tre dele, fordeles stangens samlede masse proportionalt med de tre deles arealer.

2 – Symmetrisk massefordeling

Vælg en position af lodderne – f.eks. det næstyderste hul. Placeringen skal være symmetrisk, så hele pendulet stadigvæk har massemidtpunkt i stangens midtpunkt.

For at undgå, at pendulet "kæntrer", når det hænges op i det midterste hul, kan boltene pege modsat hinanden.

Mål svingningstiden som et gennemsnit over mindst 20 svingninger for hvert af de 5 mulige ophængspunkter (det midterste inklusive).

Hvis du ikke allerede har bestemt disse mål: Udmål afstanden fra stangens midtpunkt til hver af ophængspunkterne præcist. Midtpunktet er markeret med en tynd linje – det kan være en ide midlertidigt at forlænge linjen hen over det midterste hul ved hjælp af kanten af en strimmel tape. (Disse afstande skal også bruges i det følgende forsøg.)

Gentag eventuelt måleserien med lodderne i en ny – men stadigvæk symmetrisk – position.

Beregninger – Symmetrisk massefordeling

Formlen for svingningstiden kan omskrives til følgende

$$Mag \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} = I$$

Da lodderne hænger symmetrisk, ligger massemidtpunktet i stangens midtpunkt, så alle de indgående størrelser på venstre side er kendte. Højre side omskrives ved hjælp af Steiners sætning:

$$I = I_G + M \cdot a^2$$

Det vil sige, at hvis størrelsen $Mag \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$ afbildes som funktion af a^2, skal resultaterne ligge på en ret linje med den samlede masse M som hældningskoefficient og pendulets inertimoment om massemidtpunktet I_G som skæring med y-aksen.

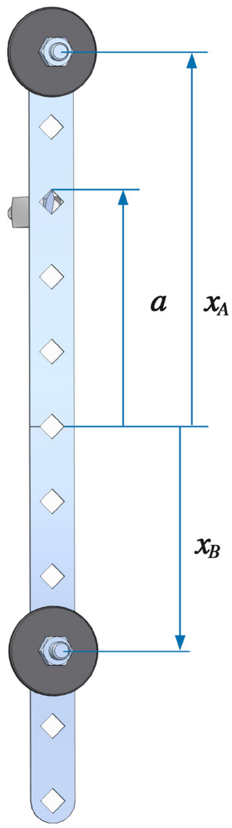
Vi kan sammenligne den fundne værdi for I_G med en beregnet, idet

$$I_G = I_S + 2(I_L + m_L x_L^2)$$

hvor I_S er stangens inertimoment om dens midtpunkt, I_L er et lods inertimoment om loddets centerakse, m_L er massen af at lod og x_L er afstanden mellem stangens og loddets midtpunkter.

I_S og I_L beregnes ved hjælp af formlerne i afsnittet "Inertimomenter". Lodderne betragtes som to cylindre, der skal behandles som udstrakte legemer, samt en bolt og en møtrik, der med god tilnærmelse kan betragtes som punktformede.

Hvis der er udført mere end en måleserie, bliver graferne parallelle.



3 – vilkårlig massefordeling

Vi behandler nu situationen, hvor der ikke længere er symmetri om stangens midtpunkt. Dermed skal vi ikke blot bestemme inertimomentet for pendulet, men også massemidtpunktet.

Udmål afstanden fra stangens midtpunkt til hver af de mulige ophængspunkter præcist. Midtpunktet er markeret med en tynd linje – det kan være en ide midlertidigt at forlænge linjen hen over det midterste hul ved hjælp af kanten af en strimmel tape.

For at kunne angive positioner entydigt, fastlægger vi en koordinatakse langs stangen, med nulpunkt i stangens midtpunkt og den positive retning opad. Positioner under stangens midtpunkt er negative.

Kald ophængets position x_O. Loddernes positioner betegnes x_A hhv. x_B og deres masser m_A hhv. m_B.

Noter omhyggeligt forsøgsbetingelserne, og mål svingningstiderne som gennemsnit over mindst 20 perioder.

Beregninger – vilkårlig massefordeling

Eftersom stangens massemidtpunkt har koordinaten 0, får vi for massemidtpunktets position x_G:

$$x_G = \frac{m_A \cdot x_A + m_B \cdot x_B}{M}$$

Afstanden fra omdrejningsaksen til massemidtpunktet bestemmes som

$$a = x_O - x_G$$

Pendulets inertimoment om ophænget beregnes ved at summere bidrag fra stangen og de to lodder:

$$\begin{aligned} I = \; & I_S + m_S \cdot x_O^2 \\ & + I_A + m_A \cdot (x_O - x_A)^2 \\ & + I_B + m_B \cdot (x_O - x_B)^2 \end{aligned}$$

hvor I_A og I_B betegner inertimomentet af lod A og B omkring loddets centrum.

Nu kan en teoretisk værdi for svingningstiden beregnes og sammenlignes med den eksperimentelle.

BESSEL-PENDULET

Loddernes masse skal øges en anelse: Monter to stålskiver med bolt og to *spændeskiver* i det yderste hul i stangens ene ende og de to aluminiumskiver i den modsatte ende – *ligeledes med to spændeskiver.*

Pendulet skal ophænges i det næstyderste hul i hver ende – dvs. at de yderste *frie* huller anvendes. Knivlejet spændes fast til en bordkant – almindeligt stativmateriale er ikke stabilt nok.

Ophængspunktet i enden med stålloddet kaldes O_1, ophængspunktet ved aluminiumloddet kaldes O_2. De to tilsvarende svingningstider kalder vi T_1 og T_2.

Det er nødvendigt med meget præcise målinger af svingningstiderne. Med stopur skal man måle over i hvert fald 150 svingninger. Korrekt anvendt vil fotoceller eller dataopsamlingsudstyr være stopuret overlegent.

Som før skal amplituden være lille.

Trimmelodderne, som udgøres af en bolt med møtrik, skal hele tiden placeres symmetrisk om stangens midtpunkt. Start med at placere dem i de to huller 50 mm fra centret.

Benyt ophængspunktet O_1 og mål T_1. Vend pendulet, så O_2 benyttes, og mål T_2.

Flyt trimmelodderne symmetrisk til næste hul og gentag. Ditto for det sidste ledige hul.

Svingningstiden varierer, når trimmelodderne flyttes. Når de er så tæt på hinanden som muligt, vil T_1 være mindre end T_2. Omvendt, når trimmelodderne er så langt fra hinanden som muligt, så er svingningstiden T_2 mindre end T_1. For en eller anden afstand må de to svingningstider være ens. Vi søger den nøjagtige værdi af denne fælles svingningstid T:

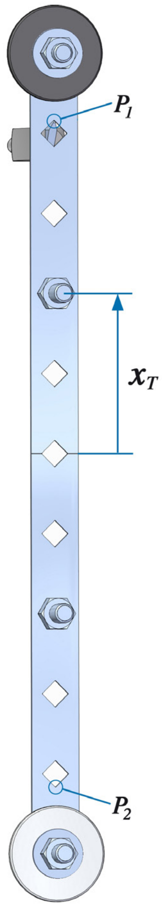
Benyt et regneark til at afbilde T_1 og T_2 som funktion af afstanden x_T fra centret til trimmelodderne. Lad regnearket tilføje parabler som "tendenslinjer" (i Excel kaldes typen for "polynomisk" med "rækkefølge" 2). Tilføj tilstrækkeligt med vandrette inddelinger på y-aksen, og aflæs den fælles svingningstid, hvor graferne krydser hinanden.

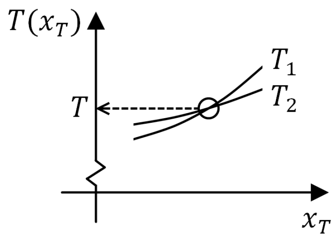
Den sidste måling, vi behøver, er afstanden Δx mellem O_1 og O_2. Der skal måles fra øverste kant af det øvre hul til nederste kant af det nedre.

Nu kan den lokale tyngdeacceleration bestemmes:

$$g = \Delta x \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Svingningstiden bør være bestemt så præcist, at det er målingen af Δx, som afgør nøjagtigheden. På de klassiske præcisionspenduler kunne denne afstand f.eks. være opmålt vha. interferometri.





Tyngdeaccelerationen – sammenligningsgrundlag

Den eksperimentelt bestemte værdi af g kan sammenlignes med den teoretiske værdi for den glatte jord-ellipsoide, med korrektion for højden:

$$\begin{aligned} g \; = \; & \quad 0{,}0002269\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin^4(\varphi) \\ & + \; 0{,}0516323\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin^2(\varphi) \\ & + \; 9{,}780327\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + C_{FA} + C_B \end{aligned}$$

Her er φ stedets breddegrad, mens højdekorrektionen er opdelt i to led C_{FA} og C_B. (Free Air-korrektion og Bouguer-korrektion). De repræsenterer hhv. en reduktion af g pga. større afstand til jordens centrum og en forøgelse af g pga. øget tyngde fra det ekstra jordlag:

$$C_{FA} = -3{,}086\cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-2}\ \cdot h$$

$$C_B = 4{,}193\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-1}}\ \cdot \rho\cdot h$$

Her er h stedets højde over havniveau.

I C_B indgår ρ – den gennemsnitlige massefylde af jordlagene mellem havniveau og positionen. Anvendes en typisk massefylde på 2670 kg/m³, kan disse to korrektioner samles til:

$$C(h) = C_{FA} + C_B = -1{,}966\cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-2}\ \cdot h$$

I praksis er det nemmest at finde stedets breddegrad vha. en tjeneste som Google Maps. Højden over havet kan man ofte finde via kommunens hjemmeside – søg efter en afdeling med geografiske data (”GIS”). Eller benyt et godt kort.

Reversionspendulet – teori

Pendulet har massen M, og inertimomentet om massemidtpunktet G kaldes for I_G.

Inertimomentet om O_1 hhv. O_2 kaldes I_1 hhv. I_2.

Afstanden mellem G og O_1 betegnes x_1 og afstanden mellem G og O_2 kaldes x_2.

Vi har nu ifølge Steiners sætning

$$I_1 = I_G + M\cdot x_1^2 \qquad I_2 = I_G + M\cdot x_2^2$$

De to svingningstider er da givet ved

$$T_1 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{I_G + M\cdot x_1^2}{M\cdot x_1\cdot g}} \qquad T_2 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{I_G + M\cdot x_2^2}{M\cdot x_2\cdot g}}$$

Hvis $T_1 = T_2$, ses at

$$\frac{I_G + M\cdot x_1^2}{x_1} = \frac{I_G + M\cdot x_2^2}{x_2}$$

Under forudsætning af, at $x_1 \neq x_2$, kan denne ligning løses mht. I_G

$$I_G = M\cdot x_1\cdot x_2$$

Svingningstiden bliver da

$$T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{x_1 + x_2}{g}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\Delta x}{g}}$$

– hvor betegnelsen Δx står for afstanden mellem ophængspunkterne.

LÆRERNOTER

Fysiske begreber

Massemidtpunkt – forudsættes kendt.
Inertimoment, Steiners sætning og svingningstid for fysisk pendul – formler er resumeret.
Reversionspendul – formlen for svingningstiden er udledt.

Matematiske forudsætninger

Ligningsløsning, trigonometriske funktioner, anvendelse af regneark, grafer.
Ønskes formler for inertimomenter udledt, kræves integralregning.

Didaktiske overvejelser

Beregningerne af stangens inertimoment kan forenkles ved at se bort fra hullerne. Dette medfører en fejl i stangens inertimoment omkring centret på lidt over 1 %.

Beregnede svingningstider for stangen alene vil øges med op til 0,5 %. (Størst afvigelse ved ophæng i centerhullet.) Med lodder monteret på stangen vil afvigelsen på svingningstiden være mindre.

En endnu mere oplagt forenkling kan ske ved at betragte bolte, møtrikker og spændeskiver som punktformede masser. Inertimomentet fejlberegnes da med under 0,08 %, svingningstiden med det halve.

Disse fejl vil formentlig kunne negligeres sammenlignet med måleusikkerheder og øvrige fejlkilder ved arbejdet med det generelle fysiske pendul.

Bemærk, at de nævnte fejl er uden betydning, når apparatet anvendes som reversionspendul !!!

Det virker fristende at udvide databehandlingen af eksperiment 2 – *Symmetrisk massefordeling* med en bestemmelse af loddernes inertimoment om eget centrum. Dette kræver subtraktion af næsten ens størrelser, og vil derfor være behæftet med ganske stor usikkerhed. Det kan kun anbefales, hvis man ønsker at gå i dybden med usikkerhedsberegning – ellers vil afvigelserne mellem teori og måling kun skabe frustration.

Det bedste er at gentage eksperiment 2 for alle de mulige værdier af x_L, hvorefter I_G kan plottes som funktion af x_L^2. Skæringen med y-aksen bliver da $I_S + 2\,I_L$.

På www.frederiksen.eu ligger der færdige regneark til bestemmelse af inertimomenterne mv.

Søg på varenummer 2181.00

Litteratur

D. Candela, K. M. Martini, R. V. Krotkov, and K. H. Langley:

Bessel's improved Kater pendulum in the teaching lab

American Journal of Physics - June 2001 - Volume 69, Issue 6, pp. 714

Apparaturliste

Følgende foreslås:

2181.00 Fysisk pendul / Bessel-pendul
0015.10 Skruetvinge
2002.50 Elektronisk tæller
1975.50 Fotocelle
0016.00 Bordklemme
0023.10 Stativmuffe, firkantet (2 styk anvendes)
0008.50 Stativstang 25 cm
0008.20 Stativstang 75 cm

Reklamationsret

Der er to års reklamationsret, regnet fra fakturadato. Reklamationsretten dækker materiale- og produktionsfejl.

Reklamationsretten dækker ikke udstyr, der er blevet mishandlet, dårligt vedligeholdt eller fejlmonteret, ligesom udstyr, der ikke er repareret på vort værksted, ikke dækkes af garantien.

Returnering af defekt udstyr som garantireparation sker for kundens regning og risiko og kan kun foretages efter aftale med Frederiksen. Med mindre andet er aftalt med Frederiksen, skal fragtbeløbet forudbetales. Udstyret skal emballeres forsvarligt. Enhver skade på udstyret, der skyldes forsendelsen, dækkes ikke af garantien. Frederiksen betaler for returnering af udstyret efter garantireparationer.